MOTI IN DUE E TRE DIMENSIONI

1. Posizione e Spostamento

Exercise 1. Un'anguria in un campo è collocata nella posizione data dalle seguenti coordinate: $x = -5.0\,m$, $y = 8.0\,m$ e $z = 0\,m$. Trovare il vettore posizione tramite le sue componenti e in termini di intensità e di orientamento.

Soluzione: esprimiamo il vettore posizione tramite i vettori unitari (o versori) semplicemente considerando le componenti come multipli di tali versori

$$\vec{r} = -5.0\vec{i} + 8.0\vec{j} + 0\vec{k}$$

per determinare l'intensità del vettore, calcoliamo il suo modulo

$$r = \sqrt{(-5.0)^2 + 8.0^2} = \sqrt{89} = 9.4\,m$$

e l'angolo formato con l'asse orizzontale

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{8.0}{-5.0}$$

per cui

$$\pi - \alpha = \arctan\frac{8.0}{-5.0} = 58°$$

da cui $\alpha = 122°$

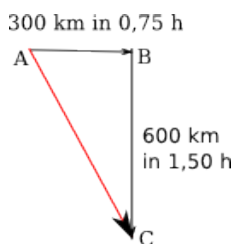
Exercise 2. Il vettore posizione di un protone è inizialmente $\vec{r} = 5.0\vec{i} - 3.0\vec{j} + 2.0\vec{k}$, espresso in metri, e in seguito $\vec{r'} = -2.0\vec{i} + 6.0\vec{j} + 2.0\vec{k}$. Determinare il vettore spostamento del vettore e a quale piano è parallelo.

Soluzione: il vettore spostamento è il vettore differenza, cioè

$$\triangle\vec{r} = \vec{r'} - \vec{r} = (-2.0 - 5.0)\,\vec{i} + (6.0 - 3.0)\,\vec{j} + (2.0 - 2.0)\,\vec{k} = -7.0\vec{i} + 3.0\vec{j} + 0\vec{k}$$

essendo nulla la componente lungo l'asse z, il vettore è parallelo al piano x, y.

2. Velocità e velocità media

Problem. Un aeroplano vola per $300\,km$ verso est dalla città A alla città B in $45\,min$, e quindi per $600\,km$ a sud da B a C in $1,50\,h$. (a) Quale vettore spostamento corrisponde al viaggio completo? Quali sono (b) il vettore velocità media e (c) la velocità scalare media complessiva?

Caso: (a): Il vettore spostamento che rappresenta il viaggio completo è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC.

$$AC = \sqrt{300^2 + 600^2} = 671\,km$$

mentre la sua direzione, riferita alla direzione sud, è

$$\alpha = \arctan\frac{300}{600} = 26.6°$$

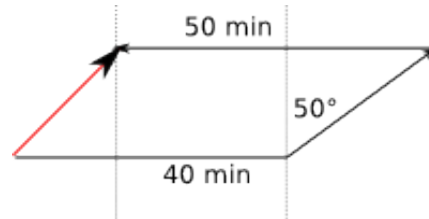
Caso: (b): per calcolare il vettore velocità media terremo conto del modulo e direzione del vettore spostamento e del tempo totale impiegato,

$$v_m = \frac{671\,km}{2.25\,h} = 298\,\frac{km}{h}$$

con direzione uguale a quella del vettore spostamento, cioè 26.6° rispetto al sud

Caso: (c): la velocità scalare media deve tenere conto dei due spostamenti avvenuti e ovviamente del tempo totale impiegato

$$v_m^{scalare} = \frac{900\,km}{2.25\,h} = 400\,\frac{km}{h}$$

Exercise 3. Un treno viaggia alla velocità costante di $60.0\,km/h$ per $40.0\,min$ verso est, quindi per $20.0\,min$ in direzione che forma un angolo di $50°$ verso est rispetto al nord, e infine per $50.0\,min$ verso ovest. Qual è la sua velocità vettoriale media su tutto il tragitto?

Soluzione: nei primi $40.0\,min$ il treno percorre, viaggiando sempre a velocità costante,

$$s_1 = 60.0\,\frac{km}{h} \cdot \frac{2}{3}h = 40\,km$$

nel secondo tratto

$$s_2 = 60.0\,\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3}h = 20\,km$$

le componenti dello spostamento lungo le direzioni nord-sud e est-ovest sono

$$\begin{aligned} s_{2x} &= 20 \cdot \sin 50 = 15.3\,km \\ s_{2y} &= 20 \cdot \cos 50 = 12.9\,km \end{aligned}$$

nel terzo tratto

$$s_3 = 60.0\,\frac{km}{h} \cdot \frac{5}{6}h = 50\,km$$

Calcoliamo le componenti del vettore risultante

$$\begin{aligned} s_x &= 40 - (50 - 15.3) = 5.3\,km \\ s_y &= s_{2y} = 12.9 \end{aligned}$$

lo spostamento risultante sarà, in modulo,

$$s = \sqrt{(5.3)^2 + (12.9)^2} = 13.9\,km$$

l'angolo è

$$\alpha = \arctan\frac{12.9}{15.3} = 40.1°$$

La velocità media è pertanto

$$v_{media} = \frac{13.9\,km}{\frac{11}{6}h} = 7.7\,\frac{km}{h}$$

Exercise 4. In $3.50\,h$ un aerostato viaggia per $21.5\,km$ verso nord e per $9.70\,km$ verso est, e sale di $2.88\,km$ verticalmente rispetto al punto di decollo dal suolo. Trovare il modulo della velocità media e l'angolo fra tale velocità e il piano orizzontale.

Soluzione: calcoliamo lo spostamento complessivo

$$s=\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}=\sqrt{(21.5)^2+(9.70)^2+(2.88)^2}=23.8\,km$$

la velocità media è quindi:

$$v_{media}=\frac{23.8\,km}{3.50\,h}=6.8\,\frac{km}{h}$$

l'angolo è quello tra il piano, rappresentato dalla retta che contiene la risultante tra s_x e s_y, $s_1=\sqrt{21.5^2+9.70^2}=23.6\,km$ e il vettore spostamento (in rosso):

$$\alpha=\arctan\frac{2.88}{23.6}=6.96°$$

Exercise 5. Il vettore posizione di uno ione è inizialmente $\overrightarrow{r}=5.0\overrightarrow{i}-6.0\overrightarrow{j}+2.0\overrightarrow{k}$, e dopo $10\,s$ diventa $\overrightarrow{r}=-2.0\overrightarrow{i}+8.0\overrightarrow{j}-2.0\overrightarrow{k}$, essendo il metro l'unità di misura. Qual è la sua velocità media durante questo intervallo di tempo?

Soluzione: Dobbiamo calcolare il vettore spostamento come differenza tra i due vettori che individuano la posizione finale e quella iniziale rispetto all'origine del sistema di riferimento

$$\overrightarrow{r_{f-i}}=(-2.0-5.0)\overrightarrow{i}+(8.0+6.0)\overrightarrow{j}+(-2.0-2.0)\overrightarrow{k}=-7.0\overrightarrow{i}+14.0\overrightarrow{j}-4.0\overrightarrow{k}$$

calcoliamo ora il modulo di tale vettore

$$r_{f-i}=\sqrt{(-7)^2+14^2+(-4)^2}=16.2$$

il vettore velocità media sarà

$$\overrightarrow{v}=-0.7\overrightarrow{i}+1.4\overrightarrow{j}-0.4\overrightarrow{k}$$

e il suo modulo

$$v_{media}=\frac{16.2}{10}=1.62\,\frac{m}{s}$$

Exercise 6. La posizione di un elettrone è data dalla relazione $\overrightarrow{r}=3.0t\overrightarrow{i}-4.0t^2\overrightarrow{j}+2.0\overrightarrow{k}$, in unità SI. ($a$) Qual è la $\overrightarrow{v}(t)$ dell'elettrone? (b) Quanto vale $\overrightarrow{v}$ per $t=2.0\,s$? (c) Quali sono in quell'istante l'intensità e la direzione di $\overrightarrow{v}$?

Caso: (a): per calcolare la velocità in funzione del tempo, dobbiamo prendere la derivata prima del vettore posizione, espresso come si vede in funzione del tempo stesso

$$\overrightarrow{v}(t)=3.0\overrightarrow{i}-8.0t\overrightarrow{j}\,\frac{m}{s}$$

Caso: (b): calcoliamo la velocità istantanea ponendo nella legge delle velocità $t=2\,s$

$$\overrightarrow{v}(2s)=3.0\overrightarrow{i}-16.0\overrightarrow{j}$$

Caso: (c): calcoliamo l'intensità della velocità istantanea

$$v=\sqrt{9+256}=16.3\,\frac{m}{s}$$

la velocità è un vettore che giace nel piano x,y, con $y<0$; esprimiamo l'angolo formato con l'asse delle x utilizzando la rotazione inversa, oraria,

$$\alpha=\arctan\frac{16}{3}=-79.4°$$

3. Accelerazione e accelerazione media

Exercise 7. Un protone inizialmente possiede una velocità $\overrightarrow{v} = 4.0\overrightarrow{i} - 2.0\overrightarrow{j} + 3.0\overrightarrow{k}$, che diventa $\overrightarrow{v} = -2.0\overrightarrow{i} - 2.0\overrightarrow{j} + 5.0\overrightarrow{k}$, dopo $4\,s$, in unità SI. Determinare l'accelerazione media, $\overrightarrow{a}$, intensità, direzione e verso, durante questi $4\,s$.

Soluzione: ricordando la definizione di accelerazione, $\overrightarrow{a} = \frac{\triangle\overrightarrow{v}}{\triangle t} = \frac{\overrightarrow{v}_f - \overrightarrow{v}_i}{\triangle t}$, si ha

$$\triangle\overrightarrow{v} = \left[(-2.0-4.0)\,\overrightarrow{i} + (-2.0+2.0)\,\overrightarrow{j} + (5.0-3.0)\,\overrightarrow{k}\right]\,\frac{m}{s}$$

cioè

$$\triangle\overrightarrow{v} = (-6.0)\,\overrightarrow{i} + (2.0)\,\overrightarrow{k}\,\frac{m}{s}$$

il modulo di tale variazione è

$$\triangle v = \sqrt{36+4} = 6.3\,\frac{m}{s}$$

da cui si ottiene il modulo dell'accelerazione

$$a = \frac{6,3\,\frac{m}{s}}{4\,s} = 1,6\,\frac{m}{s^2}$$

espressa tramite i versori

$$\overrightarrow{a} = (-1.5)\,\overrightarrow{i} + (0.5)\,\overrightarrow{k}\,\frac{m}{s}$$

avendo diviso $\triangle\overrightarrow{v}$ per 4.

Exercise 8. Il moto di una particella è tale che la sua posizione in unità SI è espressa, in funzione del tempo, dall'equazione $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i} + 4t^2\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$. Scrivere le espressioni della velocità e della sua accelerazione in funzione del tempo.

Soluzione: per ottenere l'espressione della velocità in funzione del tempo, calcoliamo la derivata prima della legge oraria

$$\overrightarrow{v} = 8t\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

mentre per l'espressione della accelerazione, calcoliamo la derivata prima della relazione che esprime la legge delle velocità

$$\overrightarrow{a} = 8\overrightarrow{j}$$

Exercise 9. La posizione $\overrightarrow{r}$ di una particella in moto nel piano xy è data dall'espressione $\overrightarrow{r} = \left(2.00t^3 - 5.00t\right)\overrightarrow{i} + \left(6.00 - 7.00t^4\right)\overrightarrow{j}$ ove $\overrightarrow{r}$ è in metri e t in secondi. Calcolare la posizione $\overrightarrow{r}$, la velocità $\overrightarrow{v}$ e l'accelerazione $\overrightarrow{a}$ per $t = 2.00\,s$. Quale sarà l'orientamento di una linea tangente al percorso della particella all'istante $t = 2.00\,s$?

Soluzione: calcoliamo la posizione, sostituendo a t il valore assegnato $t = 2.00\,s$

$$\overrightarrow{r} = \left(2.00\cdot 2.00^3 - 5.00\cdot 2.00\right)\overrightarrow{i} + \left(6.00 - 7.00\cdot 2.00^4\right)\overrightarrow{j} = 6.00\overrightarrow{i} - 106\overrightarrow{j}\;m$$

calcoliamo ora la legge delle velocità, mediante la derivata prima

$$\overrightarrow{v} = \left(6.00t^2 - 5.00\right)\overrightarrow{i} + \left(-28.00t^3\right)\overrightarrow{j}$$

sostituendo anche qui $t = 2.00\,s$, si avrà

$$\overrightarrow{v} = (6.00\cdot 4.00 - 5.00)\,\overrightarrow{i} - 28.00\cdot 8.00\overrightarrow{j} = 19.0\overrightarrow{i} - 224\overrightarrow{j}\,\frac{m}{s}$$

calcoliamo infine la legge della accelerazione

$$\overrightarrow{a} = 12.00t\,\overrightarrow{i} - 84.00t^2\overrightarrow{j}$$

da cui sostituendo si ha

$$\overrightarrow{a} = 24.0\overrightarrow{i} - 336\overrightarrow{j}\,\frac{m}{s^2}$$

calcolare l'orientamento di una linea tangente, vuol dire calcolare il coefficiente angolare di tale retta tangente, cioè il valore della derivata prima in quel punto, $t = 2.00\,s$. Utilizzeremo pertanto il valore della velocità, calcolando il rapporto tra le sue componenti vettoriali

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-224}{19.0}\right) = -85.2^\circ$$

Exercise 10. Una slitta a vela corre su una superficie ghiacciata spinta dal vento con accelerazione costante. Ad un tempo assegnato la sua velocità è $\overrightarrow{v} = 6.30\overrightarrow{i} - 8.42\overrightarrow{j}\ \frac{m}{s}$. Dopo $3\,s$ si arresta di colpo. Determinare la sua accelerazione media durante questi $3\,s$.

Soluzione: la slitta si ferma in $3\,s$, cioè la sua velocità assume il valore zero. Ricordando la definizione di accelerazione

$$\overrightarrow{a} = \frac{\triangle\overrightarrow{v}}{\triangle t} = \frac{\left(0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j}\right) - \left(6.30\overrightarrow{i} - 8.42\overrightarrow{j}\right)}{3\,s}\frac{m}{s^2} = -2.10\overrightarrow{i} + 2.81\overrightarrow{j}\ \frac{m}{s^2}$$

Exercise 11. Una particella parte dall'origine al tempo $t = 0$ con velocità iniziale di $\overrightarrow{v} = 8.0\overrightarrow{j}\ \frac{m}{s}$ e si muove nel piano xy con un'accelerazione costante di $\overrightarrow{a} = 4.0\overrightarrow{i} + 2.0\overrightarrow{j}\ \frac{m}{s^2}$. Trovare la coordinata y nell'istante in cui la coordinata $x = 29\,m$. Trovare pure la velocità scalare della particella in quell'istante.

Soluzione: la legge oraria del moto uniformemente accelerato è espressa da

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{v}_0 t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}t^2$$

essa si suddivide nelle due direzioni del moto

$$s_x = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$s_y = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

nel nostro caso

$$29 = 2.0 \cdot t^2$$

da cui, considerando la sola radice positiva,

$$t = \sqrt{\frac{29}{2.0}} = 3.8\,s$$

La coordinata y sarà pertanto

$$s_y = 8.0 \cdot 3.8 + 1.0 \cdot 3.8^2 = 45\,m$$

Per calcolare la velocità, facciamo riferimento alla alla legge delle velocità

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{a}t$$

da cui

$$v_x = 4.0 \cdot 3.8 = 15.2\ \tfrac{m}{s}$$

$$v_y = 8.0 + 2.0 \cdot 3.8 = 15.6\ \tfrac{m}{s}$$

la velocità scalare è quindi

$$v = \sqrt{15.2^2 + 15.6^2} = 22\ \frac{m}{s}$$

Exercise 12. Una particella parte dall'origine con velocità iniziale $\overrightarrow{v} = 3.00\overrightarrow{i}\ \frac{m}{s}$. La sua velocità varia poi con un'accelerazione costante $\overrightarrow{a} = -1.00\overrightarrow{i} - 0.500\overrightarrow{j}\ \frac{m}{s^2}$. Determinare posizione e velocità quando la sua coordinata x è massima.

Soluzione: scriviamo la legge oraria del moto

$$\overrightarrow{s} = 3.00t\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\left(-1.00\overrightarrow{i} - 0.500\overrightarrow{j}\right)t^2$$

esprimiamo la legge relativa alle componenti x, y

$$\begin{aligned} x &= 3.00t - 0.500t^2 \\ y &= -0.250t^2 \end{aligned}$$

essendo assimilabile all'equazione di una parabola con concavità rivolta verso il basso (coefficiente negativo di t^2), il suo massimo corrisponde al vertice della parabola e quindi ad un tempo t

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{3.00}{1.00} = 3.00\,s$$

dopo $3\,s$ la particella è pertanto in $x_{max} = 4.5\,m$, e la velocità, $v = v_0 + at$ sarà

$$\begin{aligned} v_x &= 3.00 - 1.00t = 3.00 - 3.00 = 0\,\frac{m}{s} \\ v_y &= 0 - 0.500t = -1.5\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

essa sarà rappresentabile vettorialmente come

$$\overrightarrow{v} = -15\overrightarrow{j}\,\frac{m}{s}$$

si troverà nella posizione

$$\overrightarrow{s} = 3.00 \cdot 3.0\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\left(-1.00\overrightarrow{i} - 0.500\overrightarrow{j}\right) \cdot 3.0^2$$

$$\overrightarrow{s} = 9.00\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\left(-1.00\overrightarrow{i} - 0.500\overrightarrow{j}\right) 9.00 = 4.5\overrightarrow{i} - 2.25\overrightarrow{j}\,m$$

Exercise 13. La velocità $\overrightarrow{v}$ di una particella in moto nel piano xy è data dall'espressione $\overrightarrow{v} = \left(6.0t - 4.0t^2\right)\overrightarrow{i} + 8.0\overrightarrow{j}\,\frac{m}{s}$. Calcolare l'accelerazione per $t = 3\,s$; Determinare se e quando si annullano l'accelerazione e la velocità; infine determinare se e quando la velocità ha intensità $10\,\frac{m}{s}$.

Soluzione: per ottenere l'accelerazione dobbiamo calcolare la derivata della relazione che esprime la velocità nel tempo:

$$\overrightarrow{a} = (6.0 - 8.0t)\,\overrightarrow{i}\,\frac{m}{s^2}$$

quindi

$$\overrightarrow{a}(t = 3) = -18.0\overrightarrow{i}\,\frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione si annulla quando

$$(6.0 - 8.0t)\,\overrightarrow{i}\,\frac{m}{s^2} = 0$$

per

$$t = 0,75\,s$$

La velocità si annulla se

$$\overrightarrow{v} = \left(6.0t - 4.0t^2\right)\overrightarrow{i} + 8.0\overrightarrow{j} = 0$$

ma, osservando che la componente lungo l'asse verticale non dipende dal tempo, se ne desume che la velocità non sarà mai nulla;
Calcoliamo ora il modulo della velocità in funzione del tempo

$$v = \sqrt{\left(6.0t - 4.0t^2\right)^2 + 64.0}$$

la velocità assumerà il valore richiesto di $10\,\frac{m}{s}$, se

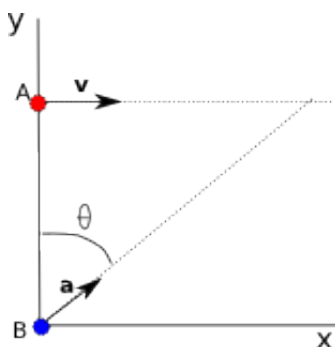
$$10 = \sqrt{\left(6.0t - 4.0t^2\right)^2 + 64.0}$$

cioè, svolgendo e dividendo per 4

$$4t^4 - 12t^3 + 9t^2 - 9 = 0$$

risolvendo e considerando la radice reale e positiva, si ha

$$t = 2.2\,s$$

Exercise 14. Una particella A si sposta sulla retta $y = 30\,m$ a velocità costante $\overrightarrow{v}$ di modulo $v = 3.0\,m/s$ e direzione parallela all'asse x (si veda la figura). Una seconda particella B parte dall'origine, con velocità iniziale nulla e accelerazione $\overrightarrow{a}$ di modulo $a = 0.40\,m/s^2$, nello stesso istante in cui la particella A attraversa l'asse y. Quale angolo θ tra $\overrightarrow{a}$ e il verso positivo dell'asse y potrebbe provocare una collisione tra le due particelle?

Soluzione: la particella A si muove in direzione orizzontale di moto rettilineo uniforme, mentre la particella B si muove di moto accelerato. La direzione del moto accelerato deve essere tale che le due particelle si incontrino. Pertanto, affinché B raggiunga A, è necessario che percorra una traiettoria scomponibile in un tratto orizzontale $s_x^B = vt = 3.0t$ e un tratto verticale $s_y^B = 30\,m$. La distanza complessiva che deve percorrere la particella B è descritta dal segmento obliquo in figura che è ottenibile applicando il th. di Pitagora al triangolo disegnato:

$$s_B = \sqrt{30^2 + (3t)^2}$$

tale distanza deve essere percorsa con una accelerazione $a = 0.4\,m/s^2$ e partendo da ferma, per cui

$$\sqrt{30^2 + (3t)^2} = \frac{1}{2}at^2 = 0,2t^2$$

Risolviamo elevando al quadrato

$$0,04t^4 - 9t^2 - 900 = 0$$

l'equazione è biquadratica e si risolve ponendo, ad es. $t^2 = z$

$$0,04z^2 - 9z - 900 = 0$$

applicando la formula risolutiva, si ha, prendendo la sola soluzione positiva

$$z = \frac{9 + \sqrt{81 + 144}}{0.08} = 300$$

risolviamo ora rispetto a t, considerando ancora la sola soluzione positiva per il tempo

$$t = \sqrt{300}$$

Ora, l'angolo θ indicato in figura è legato alle due componenti dello spostamento dalla relazione

$$\tan\theta = \frac{s_x^B}{s_y^B} = \frac{3t}{30}$$

cioè, sostituendo il valore ottenuto per t

$$\theta = \arctan\left(\frac{3 \cdot \sqrt{300}}{30}\right) = 60°$$

4. Moto Dei Proiettili

Exercise 15. Una freccetta viene lanciata orizzontalmente in direzione del centro del bersaglio P in figura con $v_0 = 10\,m/s$. Dopo $0.19\,s$ essa colpisce il punto Q sul bordo del bersaglio posto verticalmente sotto P. Calcolare la distanza PQ e la distanza dal bersaglio alla quale si trovava il lanciatore.

Soluzione: la freccetta è al momento del lancio allineata con il punto P, essendo la sua traiettoria parabolica colpirà invece il punto Q, cioè cade verso Q. Mi basta calcolare quindi la caduta verticale originata dal moto accelerato verso il basso, secondo la legge $y-y_0=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$; in questo caso la velocità iniziale è solo nella direzione orizzontale per cui $v_{0y}=0$

$$PQ=y_0-y=4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 0.19^2\,s^2=0.18\,m$$

la distanza tra il lanciatore e il bersaglio è quella che viene percorsa dalla componente orizzontale del moto della freccetta, che avviene secondo le leggi di un moto rettilineo uniforme

$$x=v_{0x}t=10\,\frac{m}{s}\cdot 0.19\,s=1.9\,m$$

Exercise 16. Un fucile è puntato orizzontalmente contro un bersaglio alla distanza di $30\,m$. Il proiettile colpisce il bersaglio $1.9\,cm$ sotto il centro. Determinare il tempo di volo del proiettile e la velocità alla bocca del fucile.

Soluzione: possiamo riferirci sempre alla figura dell'esercizio precedente. La traiettoria è di tipo parabolico e quindi mirando orizzontalmente il proiettile cadrà verso il basso di $1.9\,cm$ sotto l'azione dell'accelerazione di gravità, g. Anche qui la $v_{y0}=0$. Quindi

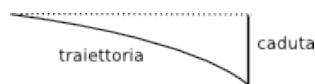
$$y-y_0=1.9\cdot 10^{-2}\,m=4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2\,s^2$$

da cui, risolvendo rispetto a t e considerando la soluzione positiva

$$t=\sqrt{\frac{1.9\cdot 10^{-2}\,m}{4.9\,\frac{m}{s^2}}}=0.062\,s$$

per calcolare la velocità iniziale, osserviamo che essa è dovuta solamente alla componente orizzontale. Quindi il proiettile percorre $30\,m$ in $0.062\,s$ con un moto rettilineo uniforme. Pertanto

$$v=\frac{30\,m}{0.062\,s}=482\,\frac{m}{s}$$

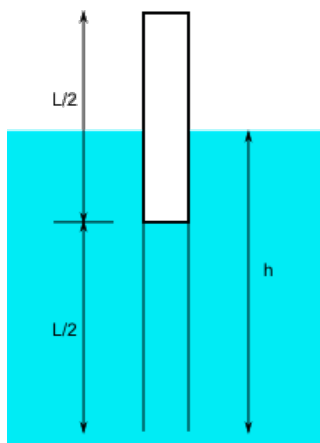
Exercise 17. Gli elettroni possono essere sottoposti a caduta libera. Se un elettrone è proiettato orizzontalmente alla velocità di $3.0\cdot 10^6\,m/s$, quanto cadrà percorrendo $1.0\,m$ di distanza orizzontale?

Soluzione: il disegno riproduce schematicamente il significato di caduta, cioè la componente verticale del moto descritta da un moto uniformemente accelerato. La componente orizzontale è invece descritta da un moto rettilineo uniforme, per cui

$$\triangle t=\frac{\triangle s}{v}=\frac{1\,m}{3.0\cdot 10^6\,\frac{m}{s}}=3.3\cdot 10^{-7}\,s$$

in questo intervallo di tempo l'elettrone percorrerà un tratto verticale (caduta) di

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\cdot 9.81\,\frac{m}{s^2}\cdot\left(3.3\cdot 10^{-7}\,s\right)^2=5.45\cdot 10^{-13}\,m$$

Se la velocità orizzontale aumentasse l'elettrone percorrerebbe $1\,m$ in un tempo inferiore e quindi la sua caduta sarebbe minore.

Exercise 18. In un tubo a vuoto un fascio di elettroni è proiettato orizzontalmente alla velocità di $1.0\cdot 10^9\,cm/s$ nella zona compresa fra due piatti orizzontali quadrati di lato $2.0\,cm$, ai quali è applicato un campo elettrico che accelera gli elettroni con una accelerazione costante e diretta verso il basso di $1.0\cdot 10^{17}\,cm/s^2$. Trovare (a) il tempo impiegato dagli elettroni per attraversare il campo, (b) lo spostamento verticale del raggio di elettroni nel passaggio tra i due piatti (che non tocca) e (c) la velocità del raggio all'uscita dal campo.

Caso: (a): gli elettroni devono percorrere un tratto orizzontale (componente) di $2.0\,cm$. Quindi

$$t = \frac{2.0\,cm}{1.0\cdot 10^9\,\frac{cm}{s}} = 2.0\cdot 10^{-9}\,s$$

Caso: (b): lo spostamento verticale, cioè la componente verticale del moto, rappresenta ancora la caduta del fascio di elettroni sotto l'azione dell'accelerazione prodotta dal campo (la caduta libera può considerarsi trascurabile osservando l'ordine di grandezza della accelerazione prodotta dal campo elettrico):

$$s = \frac{1}{2}\cdot 1.0\cdot 10^{17}\,\frac{cm}{s^2}\cdot\left(2.0\cdot 10^{-9}\right)^2\,s^2 = 0.2\,cm$$

Caso: (c): la velocità è data dal contributo delle due componenti. La componente orizzontale, v_x, rimane invariata, mentre la v_y può essere calcolata attraverso la relazione del moto accelerato uniformemente

$$v = v_0 + at = 0 + 1.0\cdot 10^{17}\,\frac{cm}{s^2}\cdot 2.0\cdot 10^{-9}\,s = 2.0\cdot 10^8\,\frac{cm}{s}$$

il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(1.0\cdot 10^9\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(2.0\cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)^2} = 1.0\cdot 10^9\,\frac{cm}{s}$$

esprimendola vettorialmente sarà

$$\overrightarrow{v} = \left(1.0\cdot 10^9\,\overrightarrow{i} - 2.0\cdot 10^8\,\overrightarrow{j}\right)\,\frac{cm}{s}$$

Exercise 19. Una palla rotola orizzontalmente fuori dal bordo di un tavolo alto $1.20\,m$ e cade sul pavimento alla distanza orizzontale di $1.50\,m$ dal bordo del tavolo. Calcolare il tempo di volo della palla e la velocità all'istante in cui ha lasciato il tavolo.

Soluzione: il moto di caduta verso il basso è un moto uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$; il dislivello è di $1.20\,m$. Calcoliamo il tempo di percorrenza, sapendo che la componente verticale iniziale della velocità è nulla,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2.40\,m}{9.81\,\frac{m}{s^2}}} = 0.50\,s$$

Durante questo intervallo di tempo la palla è avanzata in direzione orizzontale di $1.50\,m$ di moto rettilineo uniforme e quindi la velocità iniziale è la velocità costante del moto

$$v = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{1.50\,m}{0.5\,s} = 3.0\,\frac{m}{s}$$

Exercise 20. Un proiettile viene sparato orizzontalmente da un'arma posta a $45.0\,m$ sopra un terreno orizzontale. La sua velocità alla bocca dell'arma è $250\,m/s$. Calcolare il tempo di volo, a che distanza orizzontale raggiungerà il terreno e il modulo della componente verticale della velocità quando colpisce il terreno.

Soluzione: il tempo di volo si calcola tenendo conto del moto accelerato di caduta, con velocità iniziale $250\,m/s$ e velocità finale nulla

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 45.0\,m}{9.81\,\frac{m}{s^2}}} = 3.03\,s$$

il calcolo della distanza orizzontale si basa sul moto rettilineo uniforme della componente orizzontale del moto

$$x = vt = 250\,\frac{m}{s} \cdot 3.03\,s = 758\,m$$

la componente verticale della velocità è quella acquisita nella caduta libera

$$v = \sqrt{2hg} = \sqrt{2 \cdot 45.0\,m \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2}} = 29.7\,\frac{m}{s}$$

Exercise 21. Una palla da baseball viene lanciata verso il battitore orizzontalmente a una velocità iniziale di $160\,km/h$. La distanza a cui si trova il battitore è $18\,m$. Calcolare il tempo impiegato a coprire i primi $9\,m$ in orizzontale; I rimanenti $9\,m$; La caduta dovuta alla gravità nei primi $9\,m$ in orizzontale e nei rimanenti $9\,m$.

Soluzione: la velocità iniziale, trasformata in m/s, è $v_{0x} = \frac{160}{3.6} = 44.4\,\frac{m}{s}$, mentre la $v_{0y} = 0$ (essendo la palla lanciata orizzontalmente). Il moto orizzontale può essere considerato rettilineo uniforme, da cui

$$t = \frac{9\,m}{44.4\,\frac{m}{s}} = 0.2\,s$$

nei secondi $9\,m$ il tempo rimarrà invariato, trattandosi appunto di moto rettilineo uniforme;
la caduta è descrivibile mediante le leggi del moto uniformemente accelerato; nei primi $9\,m$ si avrà, con partenza da fermo

$$h_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.2^2\,s^2 = 0.2\,m$$

nei metri rimanenti, crescendo la velocità $v_y = gt = 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.2\,s = 1.9\,m/s$, si percorrerà una distanza maggiore

$$h_2 = vt + \frac{1}{2}gt^2 = 1.9\,\frac{m}{s} \cdot 0.2\,s + \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0.2^2\,s^2 = 0.6\,m$$

Exercise 22. Un proiettile è lanciato con la velocità iniziale di $30\,m/s$ con un alzo di $60°$ rispetto al piano orizzontale. Calcolare modulo e direzione della sua velocità dopo $2.0\,s$ e dopo $5.0\,s$ dal lancio.

Soluzione: calcoliamo le componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale

$$\begin{aligned} v_{0x} = v_0 \cos\vartheta &= 30\,\frac{m}{s}\cos 60° = 15\,\frac{m}{s} \\ v_{oy} = v_0 \sin\vartheta &= 30\,\frac{m}{s}\sin 60° = 26\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

dopo $2.0\,s$ la sua velocità orizzontale sarà invariata, $v_x(2\,s) = 15\,\frac{m}{s}$, mentre la componente verticale diverrà

$$v_y = v_{0y} - gt = 26\,\frac{m}{s} - 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot (2.0)\;s = 6.4\,\frac{m}{s}$$

il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + (6.4)^2} = 16\,\frac{m}{s}$$

l'angolo sarà

$$\alpha = \arctan\frac{6.4}{15} = 23°$$

sopra il piano orizzontale; dopo $5.0\,s$, la velocità orizzontale è sempre $v_x = 15\,\frac{m}{s}$, quella verticale

$$v_y = v_{0y} - gt = 26\,\frac{m}{s} - 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot (5.0)\;s = -23\,\frac{m}{s}$$

il modulo della velocità sarà

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + (-23)^2} = 27.5\,\frac{m}{s}$$

l'angolo sarà

$$\alpha = \arctan\frac{27.5}{15} = 61°$$

sotto il piano orizzontale.

Exercise 23. Una pietra viene catapultata con la velocità iniziale di $20\,m/s$ a un angolo di $40.0°$ rispetto al piano orizzontale. Trovare i suoi spostamenti proiettati in orizzontale e in verticale dopo $1.10\,s$, $1.80\,s$, $5.00\,s$ dopo il lancio.

Soluzione: calcoliamo le componenti della velocità iniziale lungo le direzioni orizzontale e verticale

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 20\frac{m}{s}\cdot\cos 40.0^\circ = 15.3\,\frac{m}{s} \\ v_{0y} &= 20\frac{m}{s}\cdot\sin 40.0^\circ = 12.9\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

la distanza percorsa nella direzione può essere calcolata tramite le leggi del moto rettilineo uniforme

$$\begin{aligned} x_1 &= v_{0x}t = 15.3\,\frac{m}{s}\cdot 1.1\,s = 16.8\,m \\ x_2 &= 15.3\,\frac{m}{s}\cdot 1.8\,s = 27.5\,m \\ x_3 &= 15.3\,\frac{m}{s}\cdot 5.00\,s = 76.5\,m \end{aligned}$$

lo spostamento verticale è determinato tramite la legge del moto uniformemente accelerato

$$\begin{aligned} y_1 &= v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 12.9\,\frac{m}{s}\cdot 1.1\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 1.1^2\,s^2 = 8.3\,m \\ y_2 &= 12.8\,\frac{m}{s}\cdot 1.8\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 1.8^2\,s^2 = 7.3\,m \\ y_3 &= 12.8\,\frac{m}{s}\cdot 5.00\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 5.00^2\,s^2 = -58\,m \end{aligned}$$

il testo non specifica la distanza dal suolo dalla quale la pietra viene scagliata. Se fosse scagliata da terra, il terzo risultato non sarebbe fisicamente significativo, in quanto la pietra avrebbe già urtato il terreno in ricaduta. La pietra, in tale ipotesi, urta il terreno dopo aver percorso

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\vartheta_0}{g} = \frac{20^2\sin 80^\circ}{9.8} = 40.2\,m$$

ciò indica che, in questo caso, anche lo spostamento orizzontale x_3 non è plausibile, avendo la pietra già urtato il terreno, definendo una distanza orizzontale massima di $40.2\,m$; in tal caso dopo $5.00\,s$ lo spostamento verticale è nullo.

Exercise 24. Una palla viene lanciata dall'alto di un colle con la velocità iniziale di $15\,m/s$ a un angolo di 20.0° sotto il piano orizzontale. Trovare il suo spostamento proiettato sul piano orizzontale e sull'asse verticale $2.30\,s$ dopo il lancio.

Soluzione: calcoliamo le componenti della velocità iniziale lungo le direzioni orizzontale e verticale:

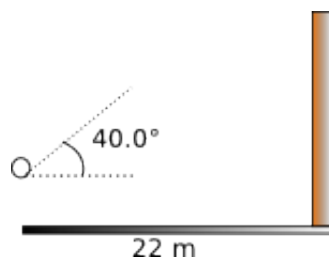
$$\begin{aligned} v_{0x} &= 15\cos 20.0^\circ = 14.1\,\frac{m}{s} \\ v_{0y} &= 15\sin 20.0^\circ = -5.1\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

(il segno negativo di v_{oy} dipende dal fatto che la palla viene lanciata sotto il piano orizzontale) la palla ha uno spostamento in orizzontale costante nel tempo

$$x = v_{0x}t = 14.1\,\frac{m}{s}\cdot 2.30\,s = 32.4\,m$$

lo spostamento lungo la direzione verticale è descrivibile con un moto uniformemente accelerato (caduta libera in assenza di attriti)

$$y = -5.1\,\frac{m}{s}\cdot 2.30\,s - \frac{1}{2}9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot(2.30)^2\;s^2 = -37.6\,m$$

Exercise 25. Una palla viene lanciata direttamente contro un muro con la velocità iniziale di $25.0\,m/s$ a un angolo di 40.0° rispetto al suolo orizzontale, come indicato in figura. Il muro si trova a $22.0\,m$ dal punto di lancio. (a) Per quanto tempo rimane in aria la palla prima di colpire la parete? (b) Quanto più in alto del punto di lancio colpisce la parete? (c) Quali sono le componenti orizzontale e verticale della sua velocità all'istante in cui colpisce la parete? (d) In questo istante ha già superato il vertice della traiettoria?

Caso: (a): il tempo di volo prima di colpire il muro è quello durante il quale la palla percorre i $22.0\,m$ che la separano dal muro stesso. Calcoliamo prima le componenti della velocità

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 25.0\,\frac{m}{s}\cdot\cos 40.0^\circ = 19.2\,\frac{m}{s} \\ v_{0y} &= 25.0\,\frac{m}{s}\cdot\sin 40.0^\circ = 16.1\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

È possibile calcolare il tempo attraverso la componente orizzontale, che appunto indica lo spostamento verso il muro

$$t = \frac{s}{v_{ox}} = \frac{22.0\,m}{19.2\,\frac{m}{s}} = 1.15\,s$$

Caso: (b): Il punto in cui colpisce la parete al di sopra del punto di lancio, dipende dalla variazione della componente verticale della velocità, nel tempo di $1.15\,s$

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 16.1\,\frac{m}{s}\cdot 1.15\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2}\cdot 1.15^2\,s^2 = 12.0\,m$$

Caso: (c): calcoliamo la velocità nell'istante in cui la palla colpisce la parete. La componente orizzontale non subisce alcuna variazione, in condizioni ideali, e pertanto sarà

$$v_x = v_{0x} = 19.2\,\frac{m}{s}$$

la componente verticale varia invece secondo le leggi della caduta di un grave

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

da cui

$$v_y = \sqrt{\left(16.1\,\frac{m}{s}\right)^2 - 2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 12\,m} = 4.9\,\frac{m}{s}$$

Caso: (d): il moto complessivo è descrivibile attraverso una parabola. Il punto più in alto coincide geometricamente con il vertice di tale parabola. Dalla equazione del moto $y = x\tan\vartheta_0 - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}$ con ϑ_0 angolo iniziale rispetto alla direzione orizzontale, si ricava l'ascissa del vertice, cioè lo spostamento in orizzontale che confronteremo con la distanza tra palla e muro. L'ascissa del vertice

$$V_x = -\frac{b}{2a} = \frac{v_0^2\sin 2\vartheta_0}{2g} = \frac{\left(25\,\frac{m}{s}\right)^2\sin 80.0^\circ}{2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 31.4\,m$$

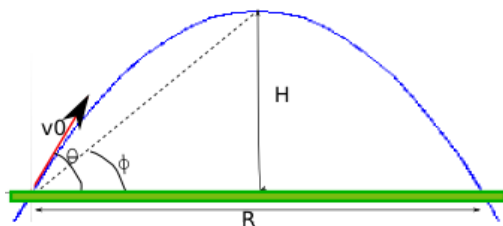
essendo la distanza tra palla e parete di $22\,m$, dopo $1.15\,s$ la palla è ancora in fase di salita.
La risposta si può dare anche confrontando i tempi, in quanto il punto di massimo corrisponde a quello in cui la velocità si annulla (in fase di salita la velocità ha segno positivo, che si inverte quando la palla inizia a scendere per il prevalere della gravità. Tra queste due fasi la velocità si annullerà appunto nel vertice della traiettoria parabolica). Quindi da

$$v_y = v_{0y} - gt$$

dovendo essere $v_y = 0$, si ha

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{16.1\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 1.64\,s$$

anche in questo caso, il tempo è superiore al tempo necessario a colpire il muro di $1.15\,s$, e ciò indica ancora come la palla sia in fase di salita.

Exercise 26. Dimostrare che, per un proiettile sparato da un terreno piano a un angolo ϑ_0 rispetto all'orizzontale, il rapporto fra la massima altezza H e la gittata R è dato dall'espressione $H/R = \frac{1}{4}\tan\vartheta_0$. Per quale angolo si ha $H = R$?

Soluzione: La relazione che esprime il punto di massima altezza, cioè il punto in cui $v_y = v_0 \sin\vartheta_0 = 0$, è

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\vartheta_0}{2g}$$

mentre la gittata, distanza tra punto di partenza e di ricaduta, cioè nel modello geometrico la distanza tra le intersezioni della parabola con l'asse orizzontale, è espressa da

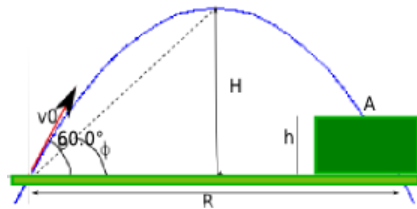
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0}{g}$$

il loro rapporto sarà pertanto

$$\frac{H}{R} = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2\vartheta_0}{2g}}{\frac{2v_0^2 \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0}{g}} = \frac{v_0^2 \sin^2\vartheta_0}{2g} \cdot \frac{g}{2v_0^2 \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0} = \frac{1}{4}\tan\vartheta_0$$

Se $H = R$, allora il rapporto $\frac{H}{R} = 1$, cioè $\frac{1}{4}\tan\vartheta_0 = 1$. Risolvendo la equazione goniometrica elementare, si ha

$$\vartheta_0 = \arctan 4 = 76°$$

Exercise 27. Una pietra viene proiettata verso un terrapieno di altezza h con la velocità iniziale di $42.0\,m/s$ a un angolo di $60.0°$ rispetto al suolo orizzontale (vedi figura). La pietra cade in A, $5.50\,s$ dopo il lancio. Trovare l'altezza h del terrapieno; la velocità della pietra subito prima dell'urto col terreno e la massima altezza H sopra il suolo raggiunto dalla pietra.

Soluzione: utilizziamo la legge che descrive il moto parabolico della pietra. Nel tempo $t = 5.50\,s$, la pietra percorre in orizzontale la distanza

$$x = v_0 \cos\vartheta_0 t = 42.0\,\frac{m}{s} \cdot \cos 60.0° \cdot 5.50\,s = 115.5\,m$$

e in verticale

$$y = v_0 \sin\vartheta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 42.0\,\frac{m}{s} \cdot \sin 60.0° \cdot 5.50\,s - 4.9\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(5.50\,\frac{m}{s}\right)^2 = 51.8\,m$$

Prima dell'urto con il terrapieno la velocità si otterrà sommando vettorialmente la velocità orizzontale, costante, con quella diretta verticalmente

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\vartheta_0 = 42.0\,\frac{m}{s} \cdot \cos 60.0° = 21\,\frac{m}{s} \\ v_y &= v_0 \sin\vartheta_0 - gt = 42.0\,\frac{m}{s} \cdot \sin 60.0° - 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5.50\,s = -17.5\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

la velocità sarà quindi

$$v = \sqrt{21^2 + (-17.5)^2} = 27.3\,\frac{m}{s}$$

la massima altezza raggiunta è espressa da

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\vartheta_0}{2g} = \frac{\left(42.0\,\frac{m}{s}\right)^2 \sin^2 60.0°}{2 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}} = 67.5\,m$$

Exercise 28. La velocità di lancio di un proiettile è cinque volte maggiore della velocità che esso raggiunge alla massima altezza. Calcolare l'angolo di elevazione del lancio.

Soluzione: la velocità di lancio non è altro che la velocità iniziale v_0. Inoltre, nel punto di massima altezza, la componente verticale $v_y = 0$. Pertanto

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt = 0$$

cioè, la velocità nel punto di massima altezza è espressa dalla sola componente orizzontale

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

e questa sarà un quinto della velocità iniziale; quindi

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 5v_{0x}$$

elevando al quadrato e sommando i termini simili, si ottiene

$$24v_{0x}^2 = v_{oy}^2$$

ma il rapporto $\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan\theta_0$, per cui

$$\theta_0 = \arctan\left(\sqrt{24}\right) = 78.5°$$

Exercise 29. Un fucile con una velocità alla volata di $450\,m/s$ spara un proiettile contro un bersaglio distante $45\,m$. quanto più alto del bersaglio deve essere puntata la canna del fucile per riuscire a colpire il bersaglio?

Soluzione: la velocità iniziale ha una direzione orizzontale, uscendo dalla canna; l'angolo $\theta_0 = 0$. La traiettoria del proiettile è descritta dalla legge del moto parabolico:

$$y = x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_{0x}^2}$$

nel nostro caso, $\theta_0 = 0$ e $v_{0x} = 450\,\frac{m}{s}$, per cui

$$y = \frac{9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 45^2\,m^2}{2\cdot 450^2\,\frac{m^2}{s^2}} = 0.049\,m$$

Exercise 30. Si spara una palla da terra in aria. All'altezza di $9.1\,m$ si osserva una velocità $\overrightarrow{v} = 7.6\overrightarrow{i} + 6.1\overrightarrow{j}\,m/s$. Calcolare la massima elevazione e la distanza orizzontale complessiva percorsa. Determinare inoltre la velocità della palla nell'istante prima di cadere a terra.

Soluzione: La velocità è espressa mediante il vettore; da questo deduciamo le componenti orizzontali e verticali

$$v_x = 7.6\,\frac{m}{s}$$
$$v_y = 6.1\,\frac{m}{s}$$

sappiamo che la componente orizzontale si mantiene costante. La componente verticale varia secondo le leggi del moto accelerato

$$v_y^2 = v_0^2\sin^2\theta_0 - 2g\,(y - y_0)$$

da cui

$$v_{0y}^2 = v_0^2\sin^2\theta_0 = v_y^2 + 2g\,(y - y_0) = 6.1^2\,\frac{m^2}{s^2} + 2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 9.1\,m = 229.3\,\frac{m^2}{s^2}$$

la massima elevazione è data da

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g} = \frac{229.3\,\frac{m^2}{s^2}}{19.6\,\frac{m}{s^2}} = 11.7\,m$$

La distanza complessiva è rappresentata dalla gittata

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

ora $v_0^2\sin 2\theta_0 = 2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = 2v_0\cos\theta_0\cdot v_0\sin\theta_0 = 2v_{0x}\cdot v_{0y} = 2v_x\cdot v_{0y}$, per la costanza della componente orizzontale. Pertanto

$$R = \frac{2\cdot 7.6\,\frac{m}{s}\cdot\sqrt{229.3}\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 23.5\,m$$

Infine, la velocità prima dell'impatto corrisponde al valore assoluto massimo della componente verticale. Poiché nel punto di massima elevazione, la componente verticale della velocità è nulla, possiamo considerare la palla che cade da $11.7\,m$ con partenza da fermo, per ottenere la velocità

$$v_y = -\sqrt{2gy} = -\sqrt{2\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 11.7\,m} = -15.1\,\frac{m}{s}$$

la velocità, espressa vettorialmente, sarà

$$\overrightarrow{v} = 7.6\overrightarrow{i} - 15.1\overrightarrow{j}\,m/s$$

il suo modulo sarà

$$v = \sqrt{7.6^2 + (-15.1)^2} = 17.0\,\frac{m}{s}$$

con

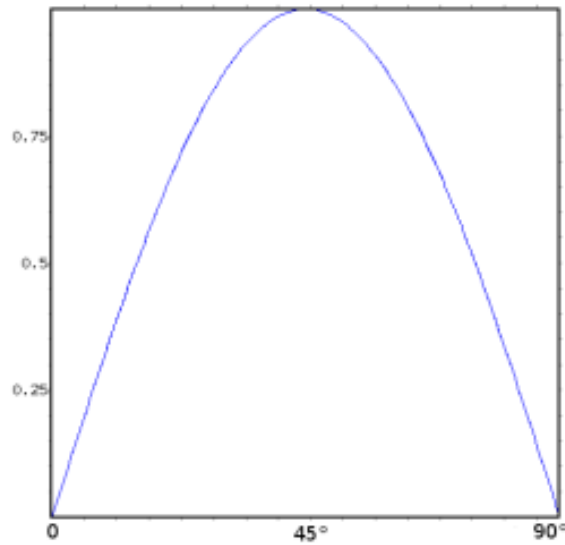
$$\theta = \arctan\left(\frac{-15.1}{7.6}\right) = 63^\circ$$

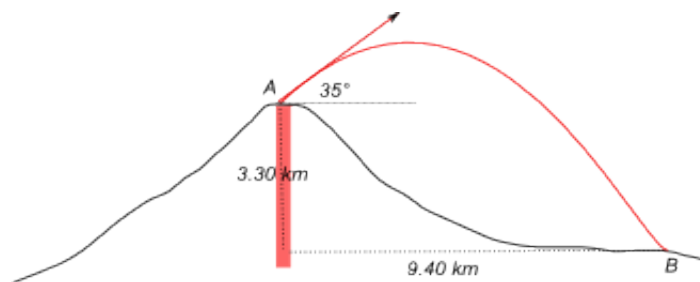
sotto il piano orizzontale.

Exercise 31. Nel suo libro Discorsi e Dimostrazioni matematiche, Galileo afferma che ■per altezze (cioè, angoli di alzo) che superano o sono minori di 45° di uguali quantità le gittate sono uguali■. Dimostrare tale affermazione.

Soluzione: la gittata è espressa da

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\vartheta_0$$

la figura mostra l'andamento della funzione $y = \sin 2\vartheta_0$

dalla quale si osserva che il valore massimo si ottiene per l'angolo di 45°. L'alzo deve essere minore di 90°, tiro verticale, e osservando la simmetria della curva si può ricavare che per due angoli complementari, cioè che sommati danno 90°, il valore della funzione seno è lo stesso e ciò determinerà una uguale gittata.

Exercise 32. Dai vulcani in eruzione vengono espulsi grossi proiettili di pietra. Se la situazione è quella rappresentata in figura, determinare a quale velocità iniziale devono essere espulsi nel punto A a un'elevazione di 35° per cadere nel punto B ai piedi del vulcano. Determinare poi il tempo di volo.

Soluzione: considero l'equazione della traiettoria dei singoli proiettili di pietra:

$$y = x\tan\vartheta_0 - \frac{gx^2}{2\left(v_0^2\cos^2\vartheta_0\right)}$$

e per ottenere , dobbiamo risolvere rispetto alla velocità iniziale

$$v_0^2\left(y + x\tan\vartheta_0\right) = \frac{gx^2}{2\cos^2\vartheta_0}$$

nel nostro caso si ha: $y = -3300\,m$, $x = 9400\,m$, $\vartheta_0 = 35^\circ$; sostituendo si ottiene

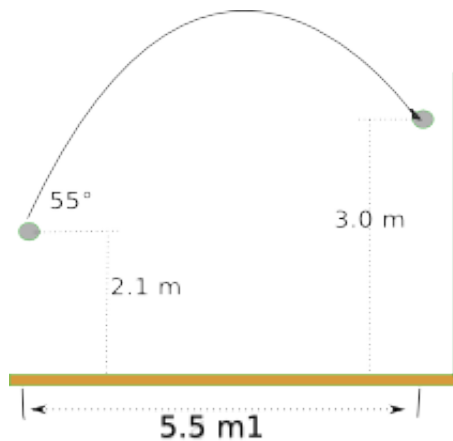
$$v_0^2\left(3300\,m + 9400\,m\tan 35^\circ\right) = \frac{9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 9400^2\,m^2}{2\cos^2 35^\circ}$$

e risolvendo rispetto alla velocità, si ha

$$v_0 = \frac{9400\,m}{\cos 35°}\sqrt{\frac{9.8\,\frac{m}{s^2}}{2\,(3300\,m + 9400\,m\tan 35°)}} = 256\,\frac{m}{s}$$

il tempo di volo può essere ottenuto mediante la componente orizzontale della velocità iniziale, in quanto il proiettile, nella direzione orizzontale, si muove di moto rettilineo uniforme; calcoliamo $v_{ox} = v_0\cos 35° = 210\,\frac{m}{s}$. Determiniamo ora il tempo impiegato per percorrere a tale velocità i $9400\,m$ di lunghezza orizzontale

$$t = \frac{9400\,m}{210\,\frac{m}{s}} = 45\,s$$

Exercise 33. A quale velocità iniziale deve essere lanciata una palla, con un angolo di elevazione di 55°, per centrare direttamente il canestro senza rimbalzo? (vedi figura)

Soluzione: utilizziamo anche qui la legge oraria del moto e risolviamola rispetto a v_0. Da

$$y - y_0 = x\tan\vartheta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\vartheta_0}$$

si ottiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2\cos^2\vartheta_0}\cdot\frac{1}{(y-y_0) + x\tan\vartheta_0}}$$

sostituendo i valori assegnati e facendo attenzione alla gestione dei segni, si ha

$$v_0 = \sqrt{\frac{9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 5.5^2\,m^2}{2x\cos 55°}\cdot\frac{1}{5.5\,m\cdot x\tan 55° - 0.9\,m}} = 8\,\frac{m}{s}$$

Exercise 34. Un proiettile viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 30.0\,m/s$ dal livello del suolo contro un bersaglio posto a una distanza orizzontale $R = 20.0\,m$ (vedi figura). Trovare i due possibili angoli, per la traiettoria alta e bassa.

Soluzione: Il valore assegnato $R = 20.0\,m$ è la gittata del proiettile; pertanto da

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\vartheta_0}{g}$$

si ottiene

$$\sin 2\vartheta_0 = \frac{Rg}{v_0^2}$$

sostituendo e risolvendo rispetto a ϑ_0, si ha

$$2\vartheta_0 = \arcsin\left(\frac{20.0\,m\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}}{30.0^2\,\frac{m^2}{s^2}}\right) = 12.6°$$

Ne segue che gli angoli di elevazione saranno

$$\begin{aligned} \vartheta_0^1 &= 6.3° \\ \vartheta_0^2 &= 83.7° \end{aligned}$$

ricordando che si ottiene la stessa gittata per angoli tra loro complementari (cioè la cui somma è 90°).

Exercise 35. Qual è la massima altezza che può raggiungere una palla lanciata da un giocatore la cui massima gittata è di $60\,m$?

Soluzione: Ricordiamo il significato delle grandezze coinvolte: la gittata è la distanza massima orizzontale percorsa dal corpo per tornare alla stessa altezza del punto di partenza; essendo la traiettoria parabolica, la gittata è la distanza tra le due intersezioni della parabola con l'asse orizzontale passante per i due punti; l'altezza massima corrisponde all'ordinata del vertice della parabola,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \vartheta_0}{2g}$$

tale altezza è massima per un angolo di 45°; la gittata è espressa da

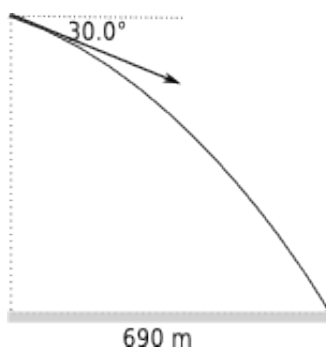
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta_0}{g}$$

per un angolo di 45°, diviene

$$R = \frac{v_0^2}{g}$$

sostituendo in H, si ha

$$H = \frac{R \sin^2 45°}{2} = \frac{60.0\,m \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = 15.0\,m$$

Exercise 36. Un aeroplano, volando a $290\,km/h$ con un angolo di 30° verso il basso rispetto al piano orizzontale, sgancia un falso bersaglio radar, come in figura. La distanza orizzontale fra il punto di rilascio e quello in cui colpisce il suolo è di $690\,m$. Determinare l'altezza dell'aereo al momento dello sgancio e il tempo di volo del bersaglio.

Soluzione: Indichiamo con v la velocità dell'aereo e quindi anche del bersaglio ad esso solidale. Possiamo pertanto calcolare la componente orizzontale di tale velocità, conoscendo l'angolo.

$$v_x = \frac{290}{3.6}\,\frac{m}{s} \cdot \cos 30.0° = 69.8\,\frac{m}{s}$$

Il bersaglio percorre pertanto i $690\,m$ in orizzontale con la velocità calcolata, per cui

$$t = \frac{690\,m}{69.8\,\frac{m}{s}} = 9.9\,s$$

L'altezza alla quale l'aereo si trova, può essere ottenuta utilizzando la relazione che descrive la traiettoria del moto, considerando come negativo l'angolo rivolto verso il basso

$$y_0 - y = x \tan \vartheta - \frac{gx^2}{2v_x^2} = 690 \tan(-30.0°) - \frac{9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 690^2\,m^2}{2 \cdot (69.8)^2\,\frac{m^2}{s^2}} = 877\,m$$

Exercise 37. Un pallone viene calciato in avanti con velocità iniziale di $20\,m/s$ e un angolo di elevazione di $45°$. Contemporaneamente un attaccante, che si trova $54\,m$ più avanti nella direzione del tiro, parte di scatto per raggiungere la palla. Quale deve essere la sua velocità media per raggiungere la palla subito prima che tocchi il terreno?

Soluzione: Calcoliamo innanzitutto la distanza che percorre la palla calciata; tale distanza corrisponde alla gittata (per l'angolo $\vartheta_0 = 45°$, la gittata è massima, essendo $\sin 90° = 1$):

$$R = \frac{v_0^2}{g} = \frac{20^2\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 41\,m$$

l'attaccante trovandosi oltre il punto di caduta della palla, dovrà raggiungerla percorrendo $54 - 41 = 13\,m$. Il tempo di volo della palla può essere ottenuto considerando il moto rettilineo uniforme della componente orizzontale

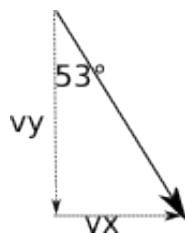
$$v_{0x} = v_0 \cos\vartheta_0 = 20\,\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14.1\,\frac{m}{s}$$

l'intervallo di tempo sarà quindi

$$t = \frac{41\,m}{14.1\,\frac{m}{s}} = 2.9\,s$$

la velocità media del calciatore sarà pertanto

$$v_{media} = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{13\,m}{2.9\,s} = 4.5\,\frac{m}{s}$$

Exercise 38. Un aereo, picchiando a un angolo di $53°$ rispetto alla verticale, sgancia un proiettile a una quota di $730\,m$ dal suolo. Il proiettile colpisce il terreno dopo $5.00\,s$. Trovare la velocità dell'aereo, la distanza orizzontale percorsa dal proiettile durante la caduta e infine le componenti orizzontale e verticale della sua velocità all'istante in cui ha colpito il terreno.

Soluzione: nell'istante in cui il proiettile viene sganciato la velocità dell'aereo e del proiettile solidale è quella illustrata in figura. Pertanto il proiettile, mentre percorre in caduta i $730\,m$, verrà accelerato verso il basso dal suo peso incrementando così la sua velocità verticale iniziale, secondo la legge del moto uniformemente accelerato

$$s = v_y t + \frac{1}{2} g t^2$$

risolvendo rispetto a v_y e sostituendo i valori assegnati, si ha

$$v_y = \frac{s - \frac{1}{2} g t^2}{t} = \frac{730\,m - 4.9\,\frac{m}{s^2} \cdot 5.00^2\,s^2}{5.00\,s} = 121.5\,\frac{m}{s}$$

diretta verso il basso; dalla componente verticale è possibile ottenere la velocità, attraverso i teoremi della trigonometria, cioè l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale al prodotto di un cateto per il coseno dell'angolo adiacente

$$v = \frac{121.5\,\frac{m}{s}}{\cos 53°} = 202\,\frac{m}{s}$$

È ora possibile calcolare anche la componente orizzontale del moto, anche col th. di Pitagora,

$$v_x = \sqrt{202^2 - 121.5^2} = 161\,\frac{m}{s}$$

Dalla componente orizzontale della velocità si ottiene la distanza orizzontale percorsa, in quanto tale moto può essere descritto dalle leggi del moto rettilineo uniforme

$$x = v_x t = 161\,\frac{m}{s} \cdot 5.00\,s = 806\,m$$

La componente orizzontale della velocità prima dell'impatto col terreno è sempre uguale a $v_x = 161\,\frac{m}{s}$, mentre la componente verticale è quella ricavata pari a $121.5\,\frac{m}{s}$ si ricava dalle leggi del moto accelerato

$$v_y^f = v_y + gt = 121.5\,\frac{m}{s} + 9.81\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 170.5\,\frac{m}{s}$$

diretta verso il basso.

Exercise 39. Una palla lanciata orizzontalmente dall'altezza di $20\,m$, tocca il suolo con una velocità tripla rispetto a quella iniziale. Trovare la velocità iniziale.

Soluzione: se la palla è lanciata orizzontalmente, la sua velocità iniziale ha solo la componente orizzontale. La velocità iniziale, dovuta alla caduta libera della palla, può essere ottenuta dalla relazione

$$v_f^2 = v_0^2 + 2gy$$

essendo $v_f = 3v_0$, sostituendo si ottiene

$$8v_0^2 = 392$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{392\,\frac{m^2}{s^2}}{8}} = 7,1\,\frac{m}{s}$$

Exercise 40. Un tennista serve la palla orizzontalmente da un'altezza sul terreno di $2.37\,m$ a una velocità di $23.6\,m/s$. Con quale altezza la palla passa sopra la rete, alta $0.90\,m$, che si trova a una distanza di $12\,m$? Se il tennista servisse con un'inclinazione verso il basso di $5.00°$ rispetto all'orizzontale, la palla passerà ancora sopra la rete ?

Soluzione: applichiamo la legge che descrive il moto parabolico che seguirà la pallina, determinando l'altezza raggiunta dopo aver percorso $12\,m$; l'altezza massima della pallina è quella al momento del lancio, per cui, essendo $\vartheta_0 = 0$

$$2.37\,m - y = \frac{gx^2}{2v_x^2} = \frac{9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 12^2\,m^2}{2 \cdot 23.6^2\,\frac{m^2}{s^2}}$$

risolvendo rispetto a y, si ottiene

$$y = 2.37\,m - \frac{9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 12^2\,m^2}{2 \cdot 23.6^2\,\frac{m^2}{s^2}} = 1.10\,m$$

la pallina oltrepassa la rete di $20\,cm$. Se l'angolo iniziale è di $5.00°$ verso il basso, bisogna calcolare la componente orizzontale della velocità, $v_{x0} = 23.6\cos 5.00° = 23.5\,\frac{m}{s}$

$$2.37\,m - y = 12 \cdot \tan 5.00° + \frac{9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 12^2\,m^2}{2 \cdot 23.5^2\,\frac{m^2}{s^2}}$$

risolvendo rispetto a y, si ha

$$y = 0.43\,cm$$

quindi la palla non supera la rete, colpendo la rete a $4,3\,cm$ sopra il terreno.

5. Moto Circolare Uniforme

Exercise 41. In un modello di atomo di idrogeno, un elettrone orbita attorno al protone su un cerchio di raggio $5.28 \cdot 10^{-11}\,m$, alla velocità di $2.18 \cdot 10^6\,m/s$. Calcolare l'accelerazione dell'elettrone.

Soluzione: l'esercizio presuppone che la velocità dell'elettrone rimanga sempre costante in modulo, in modo che il moto possa essere descritto dalle leggi del moto circolare uniforme. La velocità cambia ogni istante la propria direzione, ed essendo la velocità una grandezza vettoriale, tale variazione deve essere descritta dall'azione di una accelerazione, l'accelerazione centripeta, diretta cioè verso il centro. (tale accelerazione è dovuta alla forza elettrica tra la carica del nucleo e dell'elettrone).

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(2.18 \cdot 10^6\right)^2\,\frac{m^2}{s^2}}{5.28 \cdot 10^{-11}} = 9.00 \cdot 10^{22}\,\frac{m}{s^2}$$

Exercise 42. Determinare modulo, direzione e verso dell'accelerazione di un velocista che corre a $10\,m/s$ su una curva di raggio $25\,m$

Soluzione: basta ricordare la relazione che lega l'accelerazione centripeta alle grandezze assegnate

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2}{25\,m} = 4\,\frac{m}{s^2}$$

l'accelerazione centripeta è sempre diretta verso il centro della curva.

Exercise 43. Un campo magnetico è in grado di costringere una particella carica a seguire un percorso circolare. Supponiamo che un elettrone, per effetto di un certo campo magnetico, subisca un'accelerazione radiale di $3.0 \cdot 10^{14}\, m/s^2$. Determinare la velocità dell'elettrone se il raggio del percorso circolare è di $15\, cm$ e il periodo del moto circolare.

Soluzione: la relazione è la stessa del caso precedente; si tratta in questo caso di applicare la formula inversa

$$v = \sqrt{ar} = \sqrt{3.0 \cdot 10^{14}\, \frac{m}{s^2} \cdot 0.15\, m} = 6.7 \cdot 10^6\, \frac{m}{s}$$

il periodo, cioè il tempo di percorrenza di un intero giro, è dato da

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0.15\, m}{6.7 \cdot 10^6\, \frac{m}{s}} = 1.4 \cdot 10^{-7}\, s$$

Exercise 44. Un velocista corre alla velocità di $9.2\, m/s$ su una pista circolare, con un'accelerazione centripeta di $3.8\, m/s^2$. Determinare il raggio della pista e il periodo del moto.

Soluzione: esercizio di semplice applicazione delle relazioni che legano le grandezze cinematiche. Nel nostro caso, da

$$a = \frac{v^2}{r}$$

si ricava

$$r = \frac{v^2}{a} = \frac{\left(9.2\, \frac{m}{s}\right)^2}{3.8\, \frac{m}{s^2}} = 22.3\, m$$

il periodo è il tempo impiegato per percorrere un giro intero, cioè

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 22.3\, m}{9.2\, \frac{m}{s}} = 15.2\, s$$

Exercise 45. Un satellite terrestre viaggia su un'orbita circolare alla quota di $640\, km$ sopra la superficie terrestre. Il periodo di rivoluzione è di $98.0\, min$. Calcolare la velocità del satellite e l'accelerazione di gravità a quella distanza.

Soluzione: In questo moto circolare, l'accelerazione di gravità è l'accelerazione centripeta che tiene vincolato il satellite nell'orbita. I dati sono forniti con diverse unità di misura e nel calcolo bisogna eseguire prima le opportune equivalenze. Nel calcolare la distanza bisogna tener conto anche del raggio terrestre, essendo la Terra un corpo solido esteso e l'ipotetico centro di rotazione si trova, appunto, nel centro della Terra

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot \left(6.37 \cdot 10^6 + 6.40 \cdot 10^5\right) m}{98.0 \cdot 60\, s} = 7491\, \frac{m}{s}$$

l'accelerazione è data da

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{7491^2\, \frac{m^2}{s^2}}{\left(6.37 \cdot 10^6 + 6.40 \cdot 10^5\right) m} = 8.00\, \frac{m}{s^2}$$

Exercise 46. Se una sonda spaziale è in grado di sopportare un'accelerazione di $20\, g$, calcolare il minimo raggio di curvatura del percorso che può affrontare a una velocità pari a un decimo di quella della luce; determinare inoltre il tempo per compiere un quarto di giro.

Soluzione: la relazione che lega le tre grandezze date è

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

se la velocità è $3 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}$, cioè un decimo della luce, si ha

$$r = \frac{v^2}{a_c} = \frac{9 \cdot 10^{14}\, \frac{m^2}{s^2}}{20 \cdot 9.8\, \frac{m}{s^2}} = 4.6 \cdot 10^{12}\, m$$

tale raggio equivale a circa $31\, UA$, cioè un'orbita simile a quella di Nettuno, supposta circolare. Il tempo è ottenibile da

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4.6 \cdot 10^{12}\, m}{3.7 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}} = 9.6 \cdot 10^5\, s$$

cioè, dividendo per 4,

$$T = 2.4 \cdot 10^5\, s \approx 2.8\, anni\, terrestri$$

Exercise 47. Un ventilatore compie 1200 giri al minuto. consideriamo un punto sul bordo esterno di una pala di raggio $0.15\, m$. Trovare la distanza che percorre questo punto ad ogni giro, la sua velocità e accelerazione.

Soluzione: in numero dei giri al minuto rappresenta la frequenza; calcoliamola in Hertz

$$f = \frac{1200\, \frac{giri}{min}}{60\, \frac{s}{min}} = 20\, Hz$$

la distanza che il punto percorre è rappresentata dalla lunghezza della circonferenza di raggio $0.15\, m$, cioè

$$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 0.15\, m = 0.94\, m$$

la velocità è data da

$$v = 2\pi r f = 0.94\, m \cdot 20\, Hz = 18.8\, \frac{m}{s}$$

mentre l'accelerazione è

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{18.8^2\, \frac{m^2}{s^2}}{0.15\, m} = 2369\, \frac{m}{s^2}$$

Exercise 48. Un treno viaggia alla velocità media di $216\, km/h$. Se abborda una curva a questa velocità e la massima accelerazione tollerabile dai passeggeri è $0.050g$, determinare il minimo raggio ammissibile per le curve dei binari. Se una curva ha un raggio di $1.00\, km$ a quale valore deve essere ridotta la velocità del treno per rispettare il limite dell'accelerazione?

Soluzione: un'accelerazione di $0.050g$ corrisponde a $0.050 \cdot 9.8\, \frac{m}{s^2} = 0.49\, \frac{m}{s^2}$. La velocità in m/s vale $v = \frac{216}{3.6}\, \frac{m}{s} = 60\, \frac{m}{s}$. Poiché l'accelerazione vale $a = \frac{v^2}{r}$, ricaviamo il raggio di curvatura, risolvendo la relazione rispetto a r

$$r = \frac{v^2}{a} = \frac{60^2\, \frac{m^2}{s^2}}{0.49\, \frac{m}{s^2}} = 7347\, m$$

se il raggio viene posto a $1000\, m$, allora, risolvendo rispetto a v, si ha

$$v = \sqrt{ar} = \sqrt{0.49\, \frac{m}{s^2} \cdot 1000\, m} = 22.1\, \frac{m}{s} = 80\, \frac{km}{h}$$

Exercise 49. Nell'esplosione di una supernova il suo nocciolo può contrarsi tanto da raggiungere un raggio di $20\, km$ (stella di neutroni). Se una tale stella compie un giro al secondo, determinare la velocità di una particella posta sull'equatore e la sua accelerazione centripeta.

Soluzione: il fenomeno fisico viene affrontato in forma semplificata e può essere descritto quindi mediante le relazioni che trattano del moto circolare uniforme. Se la stella compie un giro al secondo, vuol dire che la frequenza del moto è di $1\, Hz$. Calcoliamo quindi la velocità

$$v = 2\pi r f = 2\pi \cdot 20000\, m \cdot 1\, Hz = 125664\, \frac{m}{s}$$

l'accelerazione sarà quindi

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{125664^2\, \frac{m^2}{s^2}}{20000\, m} = 789568\, \frac{m}{s^2} = 80568g$$

Exercise 50. Un astronauta sta girando in una centrifuga su un raggio di $5.0\, m$. Determinare la velocità se la sua accelerazione è di $7.0\, g$ e la frequenza e il periodo corrispondenti.

Soluzione: il moto dell'astronauta può essere descritto secondo le leggi del moto circolare uniforme. Se sono noti il raggio e l'accelerazione, basta trasformare quest'ultima nell'unità del SI, cioè $a = 7.0 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}$; sapendo che $a = \frac{v^2}{r}$, si ottiene, risolvendo rispetto a v

$$v = \sqrt{ar} = \sqrt{7.0 \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5.0\,m} = 18.5\,\frac{m}{s}$$

essendo $v = 2\pi r f$, si può ottenere la frequenza

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{18.5\,\frac{m}{s}}{2\pi \cdot 5.0\,m} = 0.6\,Hz$$

il periodo è il reciproco della frequenza

$$T = \frac{1}{0.6\,Hz} = 1.7\,s$$

Exercise 51. Determinare l'accelerazione centripeta dovuta alla rotazione della Terra per un oggetto che si trova sull'equatore. Quale dovrebbe essere il periodo di rotazione della Terra affinché questa accelerazione sia uguale a $9.8\,m/s^2$? Calcolare infine l'accelerazione per una persona posta ad una latitudine di $40°\,N$.

Soluzione: assumendo il raggio terrestre di $6.37 \cdot 10^6\,m$ e poiché l'equatore è un cerchio massimo, si ha

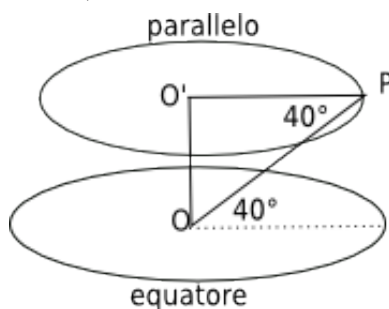
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

ora sapendo che il periodo di rotazione corrisponde ad un giorno che contiene $T = 24 \cdot 3600\,s$, si ha

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot 6.37 \cdot 10^6\,m}{86400^2\,s^2} = 0.034\,\frac{m}{s^2}$$

per avere una accelerazione pari a quella di gravità, il periodo dovrebbe essere

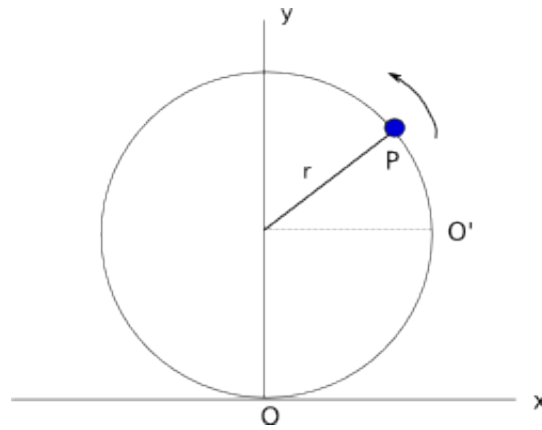
$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r}{a}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 6.37 \cdot 10^6\,m}{9.8\,\frac{m}{s^2}}} = 5066\,s = 84.4\,minuti$$

Se la persona è posta alla latitudine di $40°\,N$, descrive un cerchio (parallelo) più piccolo (si veda una rappresentazione schematica in figura).

Applicando il teorema dei triangoli rettangoli a $PO'O$, si ha

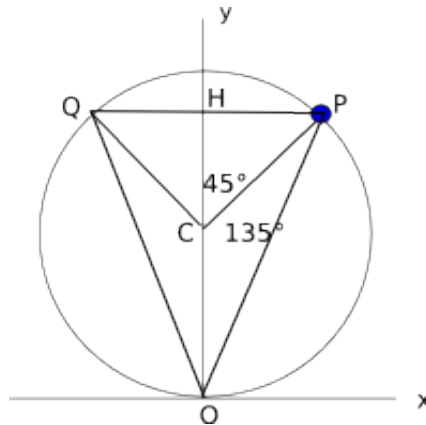
$$PO' = r_{parallelo} = OP \cos 40° = 6.37 \cdot 10^6\,m \cdot \cos 40° = 4.88 \cdot 10^6\,m$$

Applicando la relazione scritta sopra, con periodo uguale (la velocità angolare della Terra è sempre la stessa), si ha

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot 4.88 \cdot 10^6\,m}{86400^2\,s^2} = 0.026\,\frac{m}{s^2}$$

Exercise 52. Una particella P viaggia a velocità costante su un cerchio di raggio $3.00\,m$, compiendo una rivoluzione ogni $20.0\,s$. Passa per il punto O all'istante $t = 0$. (a) Trovare modulo e direzione del vettore posizione rispetto a O per $t = 5.00\,s$ e $t = 7.50\,s$. (b) Per l'intervallo di $5.00\,s$ dalla fine del 5° alla fine del 10° secondo, trovare lo spostamento e velocità media. (c) Alla fine di questo intervallo, trovare la velocità e l'accelerazione istantanea.

Caso: (a): Assumendo il punto O come riferimento e sapendo che il periodo è di $20.0\,s$, possiamo individuare la posizione del punto dopo $5.00\,s$. Esso si troverà a un quarto di giro dopo O (infatti $5.00\,s$ sono la quarta parte del periodo). Il vettore spostamento sarà pertanto la corda OO', cioè il lato del quadrato inscritto:

$$OO' = r\sqrt{2} = 3.00 \cdot \sqrt{2} = 4.24\,m$$

dopo $7.50\,s$ il punto O si sarà spostato di modo che la corda OO'' sottende un angolo al centro di $135°$. La sua lunghezza si può calcolare con il teorema della corda sapendo che l'angolo alla circonferenza sotteso dalla stessa corda è metà dell'angolo al centro, cioè $67.5°$; oppure attraverso il modello geometrico nella figura sotto:

il triangolo OQP è isoscele, il triangolo CHP è rettangolo isoscele, per cui CH, lato del quadrato di diagonale CP, è $CH = \frac{3.00\,m}{\sqrt{2}} = 2.12\,m$ e l'altezza $OH = 3.00 + 2.12\,m = 5.12\,m$. Inoltre, osservando che $CH = HP$, si può ricavare OP con il th. di Pitagora

$$OP = \sqrt{(5.12^2 + 2.12^2)\ m^2} = 5.54\,m$$

Caso: (b): in questo intervallo, dalla fine del 5° alla fine del 10° secondo, la particella percorre un quarto di giro; lo spostamento è dato dal vettore che congiunge i punti O'y la cui intensità è pari al lato del quadrato inscritto, cioè

$$s = 3.00 \cdot \sqrt{2} = 4.24\,m$$

l'angolo formato è di $135°$. La velocità vettoriale media è

$$v = \frac{4.24\,m}{5.00\,s} = 0.85\,s$$

nella stessa direzione dello spostamento

Caso: (c): la velocità istantanea alla fine di tale intervallo, cioè dopo $10\,s$, si ha

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 3.00\,m}{20.00\,s} = 0.94\,\frac{m}{s}$$

l'accelerazione sarà

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{0.94^2\ \frac{m^2}{s^2}}{3.00\,m} = 0.30\,\frac{m}{s^2}$$

Exercise 53. Un ragazzino fa ruotare un sasso legato a una corda lunga $1.5\,m$ su un cerchio orizzontale a $2.0\,m$ dal suolo. La corda si rompe, e il sasso si muove ora orizzontalmente andando a cadere a $10\,m$ di distanza. Calcolare l'accelerazione centripeta del sasso nel suo moto circolare.

Soluzione: L'esercizio raggruppa più aspetti sinora presentati. Il moto di rotazione legato alla corda è descritto dalle leggi del moto circolare uniforme; lo spezzarsi della corda serve a richiamare l'attenzione sul significato di velocità tangenziale, cioè la velocità che il sasso possiede se lasciato libero di muoversi di moto rettilineo uniforme. Infine la caduta indica che il sasso è soggetto alla forza di gravità che lo tira verso il basso facendogli descrivere un moto parabolico, cioè con componente della velocità orizzontale costante.

La corda rappresenta il raggio di curvatura costante del moto circolare. La velocità tangenziale sarà calcolabile dalle leggi del moto parabolico. Da $y = \frac{gx^2}{2v_0^2}$, con $\vartheta_0 = 0$, si ha

$$v = x\sqrt{\frac{g}{2y}} = 10\,m \cdot \sqrt{\frac{9.8\,\frac{m}{s^2}}{2 \cdot 2.0\,m}} = 15.65\,\frac{m}{s}$$

L'accelerazione sarà pertanto

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{15.65^2\,\frac{m^2}{s^2}}{1.5\,m} = 163.3\,\frac{m}{s^2}$$